CONCOURS NATIONAL – MAROC - 1994
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'analyse

Dans ce problème

Ω est le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ de centre O , de rayon 1 . Γ est le cercle unité , $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω , c'est à dire $\Omega \cup \Gamma$.

Le but est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème :

(P) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = f \text{ sur } \Gamma \end{cases}$, où f est une fonction donnée , définie sur Γ à valeurs réelles et continues .

On appelle solution de P une fonction u définie et continue sur $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles , coïncidant sur Γ avec f , de classe C^2 sur Ω et vérifiant :

$$\forall\ (x,y)\in\Omega\ ,\quad \Delta u(x,y) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x,y) = 0\ .$$

La première partie est constituée de cinq questions <u>indépendantes</u> les unes des autres .

Les parties suivantes utilisent les résultats énoncés dans le I.

Le barème tiendra essentiellement compte des parties I et II et particulièrement des efforts de rédaction accomplis par les candidats .

I <u>Préliminaires</u>

1) Soit u une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 . On définit F : $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$F(r,\theta) = u(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ pour (r,θ) dans $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$.

a) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées : $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de u par rapport à x et y .

b) En déduire que : $\forall (r,\theta) \in\ ]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$,

$$r^2\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\ \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = r^2\ \Delta u(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)\ .$$

2) Soit F de $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 , 2π - périodique . Pour n dans $\mathbb{Z}$ et r dans $]0\ ,\ 1[$ on pose :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

a) Citer le théorème qui permet d'affirmer que c_n est de classe C^2 sur $]0\ ,\ 1[$.

b) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\forall\ r \in\ ]0\ ,\ 1[$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta = -\ n^2\ c_n(r)\ .$$

3) Soit (E_n) l'équation différentielle : $x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0$

On appelle S_n l'ensemble des solutions à valeurs complexes sur $]0\ ,\ 1[$ et $\hat{S}_n$ l'ensemble des fonctions de S_n qui sont bornées .

a) Montrer que S_n et $\hat{S}_n$ sont des $\mathbb{C}$- espaces vectoriels .

b) Que peut-on dire de S_n sans faire de calculs ?

c) Trouver S_0 et $\hat{S}_0$.

Infty08

d) Pour $n \neq 0$,chercher les solutions de E_n de la forme : $x \longrightarrow x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) .

e) En déduire que $\hat{S}_n$ est de dimension 1 et est engendré par la fonction $x \longrightarrow x^{|n|}$.

4- Soit $(A_n)_{n \in Z}$ une « suite » bornée de complexes et $M = \underset{n \in Z}{\text{Sup}} |A_n|$.

On définit pour r dans]0 , 1[, θ dans $\mathbb{R}$, $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=-n}^{n} A_k \, r^{|k|} \, e^{ik\theta}$.

a) Montrer que pour (r , θ) dans]0 ,1[x $\mathbb{R}$, $(S_n)_{n \geq 1}$ converge . On appelle F (r,θ) la limite .

b) Citer un théorème (avec précision) qui permet de dériver terme à terme une fonction définie par la somme d'une série convergente sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\frac{\partial F}{\partial r}$ existe sur]0 , 1[x $\mathbb{R}$ et vaut :

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k \, |k| \, r^{|k|-1} \, e^{ik\theta}$. (avec la convention : pour k = 0 le terme est nul)

On admettra que F est de classe C^{∞} et qu'on peut dériver de la même façon la série définissant F par rapport à r et θ autant de fois que l'on veut .

d) Montrer que :

$$\forall (r,\theta) \in]0,1[\times \mathbb{R}, \; r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + r \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 .$$

5) Pour r dans]0 , 1[, x dans $\mathbb{R}$, on définit $P_r(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} e^{ikx}$.

(cette quantité existe : c'est une conséquence de 4-a)

a) Montrer les égalités suivantes , pour r dans]0 , 1[et x dans $\mathbb{R}$:

$$P_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos(kx) = \text{Re}\left(\frac{1 + r\,e^{ix}}{1 - r\,e^{ix}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x} .$$

b) En déduire que $P_r(x)$ est positif .

c) Citer un théorème qui permet de justifier l'égalité :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in]0,1[$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - x)d\theta = 1$.

II <u>Analyse du problème</u>

On suppose dans ce II que u est une solution du problème (P) . On définit F comme dans le I.1 .

1) Montrer que F est de classe C^2 et que $r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + r \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$.

On définit $c_n(r)$ comme dans le I.2 avec le F précédent .

2) Citer un théorème de cours dont la conclusion est :

$$\forall (r,\theta) \in]0,1[\times \mathbb{R}, \quad F(r,\theta) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(r)\, e^{ik\theta} .$$

3) a) En utilisant I montrer que $r \to c_n(r)$ est dans $\hat{S}_n$.

b) En déduire qu'il existe $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dans $\mathbb{C}^Z$ telle que :

Infty08

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, r \in\ ]0\ ,\ 1[$, $c_n(r) = A_n\, r^{|n|}$.

c) Montrer que $A_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$ (on reprendra la définition de c_n) .

Dorénavant on appellera $g(\theta)$ le nombre $f(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.

4) Avez -vous montrer l'un des objectifs initiaux ? (si oui lequel : existence ou unicité de la solution ? Justifier votre réponse)

III Synthèse

Pour (r,θ) dans $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$, on définit :

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt$$

$$F(r,\theta) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k r^{|k|}\, e^{ik\theta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sum_{k=-n}^{k=n} r^{|k|} e^{-ik(\theta-t)} dt$$, lorsque cette limite existe .

1) a) En utilisant I montrer que la limite existe .
b) Montrer que :

$$F(r\ ,\ \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, P_r(\theta - t)\, dt$$. (pour (r,θ) dans $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$)

2) En utilisant I montrer que : $r^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$.

On définit pour (x,y) dans Ω : $u(x,y) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\dfrac{1+(x+iy)e^{-it}}{1-(x+iy)e^{-it}} \right) dt \right)$.

3) On admettra que u est de classe C^2 sur Ω .
a) Montrer que $\forall (r,\theta)$ dans $]0\ ,\ 1[\times \mathbb{R}$, $F(r\ ,\theta) = u(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$.
b) En déduire que $\Delta u = 0$ sur $\Omega \setminus \{(0,0)\}$ puis que $\Delta u = 0$ sur Ω .

4) Montrer que $F(r,\theta) - g(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(\theta - u) - g(\theta))\, P_r(u)\, du$.

5) Montrer que :

$\forall\ 0 < \eta < \pi$, $|F(r,\theta) - g(\theta)| \le \sup_{|x-y|<\eta} |g(x) - g(y)| + \dfrac{c(1-r^2)}{\sin^2\eta}$, où c désigne une constante réelle dépendant seule de g . (on pourra utiliser I.5)

6) En déduire que $\lim_{r\to 1} F(r,\theta) = g(\theta)$, la limite étant uniforme en θ .

7) Conclure .

Infty08